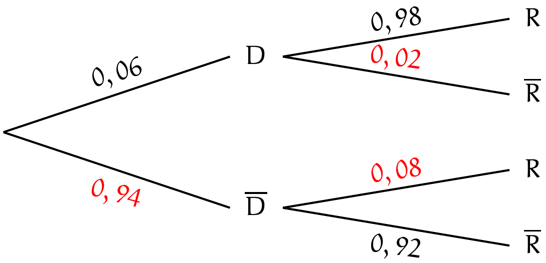
Polynésie 2018. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) L'énoncé fournit $P(D) = 0,06$, $P_D(R) = 0,98$ et $P_{\overline{D}}\left(\overline{R}\right) = 0,92$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(R)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(R) &= P(D) \times P_D(R) + P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,06 \times 0,98 + (1 - 0,06) \times (1 - 0,92) \\ &= 0,134. \end{aligned}$$

2) On veut calculer $P_R(D)$.

$$P_R(D) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{P(D) \times P_D(R)}{P(R)} = \frac{0,06 \times 0,98}{0,134} = 0,44 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

La proportion de DVD défectueux dans le stock de DVD retirés est strictement inférieure à la moitié. L'affirmation est donc fausse.

Partie B

Ici, $n = 150$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,06$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 9 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 141 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,06 - 1,96\sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}; 0,06 + 1,96\sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}\right] = [0,021; 0,099].$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{14}{150} = 0,093\ldots$ Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse.

Partie C

1) $P(X \leqslant 92) = 1 - P(X > 92) = 1 - P(X \geqslant 92) = 0,9$. Ensuite, $P(X \leqslant 92) = P(X - 80 \leqslant 12) = P\left(\dfrac{X-80}{\sigma} \leqslant \dfrac{12}{\sigma}\right)$ où cette fois-ci la variable $Z = \dfrac{X-80}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On veut $P\left(Z \leqslant \dfrac{12}{\sigma}\right) = 0,9$. La calculatrice fournit $\dfrac{12}{\sigma} = 1,281\ldots$ puis $\sigma = 9.36$ à $0,01$ près.

2) La probabilité demandée est

$$P_{X \geqslant 90}(X \leqslant 95) = \frac{P((X \geqslant 90) \cap (X \leqslant 95))}{P(X \geqslant 90)} = \frac{P(90 \leqslant X \leqslant 95)}{P(X \geqslant 90)}.$$

La calculatrice fournit $P_{X \geqslant 90}(X \leqslant 95) = 0,618$ arrondi au millième.

EXERCICE 2

Partie A

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0, 4]$ et pour $x \in [0, 4]$, $f'(x) = 0 + b \times \frac{\pi}{4} \times \cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right) = \frac{b\pi}{4}\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

b) On veut $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$ ce qui fournit $\frac{b\pi}{4}\cos(c) = 0$ et $\frac{b\pi}{4}\cos(c + \pi) = 0$ puis $\cos(c) = \cos(c + \pi) = 0$. Puisque $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\cos(c) = 0$, on en déduit que $c = \frac{\pi}{2}$.

2) Puisque $f(x_B) = y_B$, on a $f(0) = 1$ avec $f(0) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b$. Donc, $a + b = 1$.

Puisque $f(x_C) = y_C$, on a $f(4) = 3$ avec $f(4) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = a + b\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a - b$. Donc, $a - b = 3$. Enfin,

$$\left\{\begin{array}{l} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 1 + 3 \\ 2b = 1 - 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \end{array}\right. .$$

Ainsi, nécessairement, pour tout réel x de $[0, 4]$, $f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$. L'énoncé semble nous dispenser de vérifier que réciproquement, la fonction ci-dessus convient.

Partie B

1) $h = AB = 1$ et $BF = 2$ puis $r_1 = \frac{1}{2}BF = 1$. Le volume V_1, exprimé en unités de volume, du cylindre de section le rectangle $ABFG$ est donc

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi.$$

2) $r_2 = \frac{1}{2}CE = 3$. Donc, le volume V_2, exprimé en unités de volume, de la demi-sphère de section le disque de diamètre $[CE]$ est

$$V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 27 = 18\pi.$$

3) a) Le volume cherché est $\pi \times \frac{4}{5} \times f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4\pi}{5}\left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) = 2,64$ arrondi au centième.

b) Algorithme complété.

$V \leftarrow 0$
Pour k allant de 0 à $n - 1$:
$\quad V \leftarrow V + \pi \times \frac{4}{n} \times \left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{k}{n}\right)\right)$
Fin Pour

EXERCICE 3

1) Une primitive sur $[0,+\infty[$ de la fonction f est la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : pour tout réel x, $F(x) = -e^{-kx}$.

2) Le point B a pour coordonnées $\left(1, ke^{-k}\right)$. L'aire du triangle OCB est

$$\frac{CO \times CB}{2} = \frac{1}{2} \times 1 \times ke^{-k} = \frac{k}{2}e^{-k}.$$

Notons $\mathscr{D}'$ le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part. Puisque la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0, 1]$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}'$ est

$$\int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = \left(-e^{-k}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-k}.$$

L'aire de $\mathscr{D}$ est alors l'aire de $\mathscr{D}'$ à laquelle on retranche l'aire du triangle OCB : $1 - e^{-k} - \frac{k}{2}e^{-k}$.

3) Soit k un nombre réel strictement positif. k est solution du problème si et seulement si $1 - e^{-k} - \frac{k}{2}e^{-k} = 2 \times \frac{k}{2}e^{-k}$ ce qui équivaut à $1 - e^{-k} - \frac{3k}{2}e^{-k} = 0$.

Pour $x \geqslant 0$, posons $g(x) = 1 - e^{-x} - \frac{3}{2}xe^{-x}$. La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = -(-1)e^{-x} - \frac{3}{2}\left(e^{-x} + x \times \left((-1)e^{-x}\right)\right) = e^{-x} - \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}xe^{-x} = \frac{1}{2}(3x - 1)\,e^{-x}.$$

Pour tout réel strictement positif x, e^{-x} est strictement positif et donc $g'(x)$ est du signe de $3x-1$. On en déduit que la fonction g' est strictement négative sur $\left[0, \frac{1}{3}\right[$ et strictement positive sur $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ puis la fonction g est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

Puisque la fonction g est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, pour $x \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$, on a $g(x) < g(0)$ ou encore $g(x) < 0$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\left]0, \frac{1}{3}\right]$. D'autre part, $g(1) = 1-e^{-1}-\frac{3}{2}e^{-1} = 1-\frac{5}{2e} = 0,08\ldots$ Donc, $g(1) > 0$ puis $g(x) > 0$ pour $x \geqslant 1$. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas non plus de solution dans $[1,+\infty[$.

Maintenant, la fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. On sait alors que pour tout réel α de l'intervalle $\left[g\left(\frac{1}{3}\right), g(1)\right]$, l'équation $g(x) = \alpha$ a une solution et une seule dans $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Puisque $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ et $g(1) > 0$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule dans $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]0,+\infty[$ (et cette solution est dans $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$) ou encore, il existe un réel strictement positif k et un seul tel que l'aire de $\mathscr{D}$soit le double de l'aire du triangle OCB.

EXERCICE 4.

Partie A - Etude d'un premier milieu

Pour n entier naturel donné, on note S_n l'événement : « l'atome est dans un état stable, n nanosecondes après le début de l'observation ». L'événement : « l'atome est dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation » est donc $\overline{S_n}$.

1) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}a_1 = P(S_1) &= P(S_0) \times P_{S_0}(S_1) + P\left(\overline{S_0}\right) \times P_{\overline{S_0}}(S_1)\\ &= 1 \times (1-0,005) + 0 \times 0,6 = 0,995\end{aligned}$$

puis $b_1 = 1 - a_1 = 0,005$.

De même,

$$a_2 = (1-0,005) \times a_1 + 0,6b_1 = 0,995 \times 0,995 + 0,6 \times 0,005 = 0,993\,025$$

pauis $b_1 = 1 - a_2 = 0,006\,975$.

2) Soit n un entier naturel. Toujours d'après la formule des probabilités totales,‘

$$a_{n+1} = P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) + P\left(\overline{S_n}\right) \times P_{\overline{S_n}}(S_{n+1}) = 0,995a_n + 0,6b_n$$

et

$$b_{n+1} = P(S_n) \times P_{S_n}\left(\overline{S_{n+1}}\right) + P\left(\overline{S_n}\right) \times P_{\overline{S_n}}\left(\overline{S_{n+1}}\right) = 0,005a_n + 0,4b_n.$$

Ainsi, si on pose $A = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_nA$.

3)

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -0,395 \\ 1 & 47,4 \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 121 & 0 \\ 0 & 47,795 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix}$.

4) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$. l'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Tout d'abord,

$$PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_2AI_2 = A$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = X_n = X_0A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120(1-0,395^n) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{1}{121}(120 + 0,395^n)$.

6) Puisque $-1 < 0,395 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,395^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{120}{121}$. Au bout d'un grand nombre de nanosecondes, il y a 120 chances sur 121 que l'atome soit dans un état stable ou encore, il est presque certain que l'atome soit dans un état stable.

Partie B - Etude d'un second milieu

1) L'énoncé donne $P_{\overline{S_n}}(S_{n+1}) = a$ et $P_{S_n}\left(\overline{S_{n+1}}\right) = 0,01$ et donc aussi $P_{\overline{S_n}}\left(\overline{S_{n+1}}\right) = 1-a$ et $P_{S_n}(S_{n+1}) = 0,99$
La matrice de transition dans le milieu 2 est donc $M = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix}$.

2)

$$XM = X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \Rightarrow 0,98 \times 0,99 + 0,02a = 0,98$$
$$\Rightarrow a = \frac{0,98 - 0,98 \times 0,99}{0,02} \Rightarrow a = 0,49.$$

Donc, $a = 0,49$ ou encore la probabilité de passer de l'état excité à l'état stable est $0,49$.

